- Επανάληψη τοπολογικών εννοιών του $\mathbb{R}^n$.
τοπολογικό κάλυμμα - θήκη ενός $U \subset \mathbb{R}^n$

Ακολουθίες στον $\mathbb{R}^n$.

Εισαγωγικά

Οι ακολουθίες στο $\mathbb{R}^n$ ορίζονται επακριβώς ανάλογα με τις πραγματικές ακολουθίες, έχοντας επί το πλείστον τις ίδιες ιδιότητες και πανομοιότυπο τρόπο απόδειξης.

Η μόνη διαφορά εντοπίζεται στην αντικατάσταση της απόλυτης τιμής του $\mathbb{R}$ με την Ευκλείδια νόρμα του $\mathbb{R}^n$

Το βασικό αποτέλεσμα μελέτης των ακολουθιών στον $\mathbb{R}^n$, είναι ότι κάθε ακολουθία Cauchy συγκλίνει, γεγονός που καθιστά τον $\mathbb{R}^n$ πλήρη μετρικό χώρο.

Ορισμός 1: Έστω η απεικόνιση $\mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$: $\forall n \in \mathbb{N}: n \to \bar{X}_n \in \mathbb{R}^n$. Κάθε τέτοια απεικόνιση ονομάζεται ακολουθία στον $\mathbb{R}^n$, συμβολικά $(\bar{X}_n) \subset \mathbb{R}^n$.

(Η διαφορά, βάσει ορισμού 1, με πραγματικές ακολουθίες, είναι ότι ο n-οστός όρος της $(\bar{X}_n)$ είναι διάνυσμα n πλήθους συνιστωσών)

Ορισμός 2 (σύγκλισης) Μια ακολουθία $(\bar{X}_n) \subset \mathbb{R}^n$ συγκλίνει στο $\bar{X}_0$ (διάνυσμα) ή έχει όριο το $\bar{X}_0 \in \mathbb{R}^n$, συμβολικά $\bar{X}_n \to \bar{X}_0$ όταν $n \to \infty$ ή απλούστερα $\bar{X}_n \to \bar{X}_0$, αν

$\|\bar{X}_n - \bar{X}_0\| \to 0$ στο $\mathbb{R}$, δηλαδή ισοδύναμα

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : \|\bar{X}_n - \bar{X}_0\| < \varepsilon$$

Παρατήρηση (Ισχυρισμός) Αν μια ακολουθία $(\bar{X}_n) \subset \mathbb{R}^n$ συγκλίνει στο $\bar{X}_0$, τότε το $\bar{X}_0$ είναι μοναδικό.
Ισοδύναμα, το όριο μιας ακολουθίας στον $\mathbb{R}^n$, εφόσον υπάρχει, είναι μοναδικό

Απόδειξη: Έστω $\bar{X}_n \to \bar{X}_0$ και $\bar{X}_n \to \bar{y}_0$ με $\bar{X}_0 \neq \bar{y}_0$, δηλαδή $\|\bar{X}_0 - \bar{y}_0\| > 0$.
Τότε για:

$$\varepsilon = \frac{\|\bar{X}_0 - \bar{y}_0\|}{2} > 0 \text{, έχω ότι:}$$

$$\exists n_1 \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_1 : \|\bar{X}_n - \bar{X}_0\| < \frac{\|\bar{X}_0 - \bar{y}_0\|}{2} \quad (1)$$

και

$$\exists n_2 \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_2 \ \|\bar{X}_n - \bar{y}_0\| < \frac{\|\bar{X}_0 - \bar{y}_0\|}{2} \quad (2)$$

και άρα $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq \max\{n_1, n_2\}$:

$$\|\bar{X}_0 - \bar{y}_0\| \leq \|\bar{X}_0 - \bar{X}_n\| + \|\bar{X}_n - \bar{y}_0\| \underset{(1),(2)}{<} \frac{\|\bar{X}_0 - \bar{y}_0\|}{2} + \frac{\|\bar{X}_0 - \bar{y}_0\|}{2} = \|\bar{X}_0 - \bar{y}_0\|$$

, άρα άτοπο.